

Stochastik : Ausflugsschiff

1 Ausflugsschiff - Aufgaben

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

In der Kundendatei eines Reisebüros befinden sich tausende Kundendaten. Dieses Reisebüro bietet auch Fahrten mit einem Ausflugsschiff an.

1. Binomialverteilung

6% aller Kunden haben bisher schon einmal eine solche Fahrt gebucht und wurden in der Datei mit einem "S" markiert. Es werden nun 550 Kunden zufällig aus der Kundendatei ausgewählt. Verwenden Sie bei den folgenden Berechnungen die Binomialverteilung.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 40, aber höchstens 50 der ausgewählten Kunden weniger mit einem "S" gekennzeichnet sind.

(4 P)

- (b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kunden weniger mit einem "S" gekennzeichnet sind, als es zu erwarten ist.

(3 P)

- (c) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A an, dessen Wahrscheinlichkeit 0.94^{550} beträgt.

(1 P)

Lösung

Hinweis:

Mit gleichzeitigem Drücken von `Strg` und **Lösung** bzw. `Ctrl` und **Lösung** wird die Lösung in einem neuen Tab angezeigt.

2. Stofftasche

Betrachtet wird nun die Fahrt mit dem Ausflugsschiff, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden vier Fahrgäste zufällig ausgelost, die jeweils eine Stofftasche mit Werbegeschenken als Preis erhalten. An der Fahrt nimmt eine Familie mit Vater, Mutter und zwei Kindern teil.

- (a) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Vater einen Preis gewinnt.

(1 P)

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Familie genau zwei Preise gewinnt. (3 P)

(c) Zusätzlich befindet sich in einer der Stofftaschen ein Gutscheineft (Hauptpreis). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Familie genau zwei Preise, aber nicht den Hauptpreis gewinnt. (3 P)

Lösung

3. Reservierungen

Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Nach der Erfahrung des Reisebüros treten nur 90% der Personen, die eine Fahrt reserviert haben, auch zur Fahrt an.

Das Reisebüro nimmt für jede Fahrt immer 64 Reservierungen an, obwohl nur 60 Plätze auf dem Schiff vorhanden sind. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so müssen die überzähligen Personen abgewiesen werden.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen.

(a) Geben Sie im Sachzusammenhang einen Grund dafür an, dass die Zufallsgröße X im Allgemeinen nicht binomialverteilt ist. (1 P)

Im Folgenden wird dennoch vereinfachend angenommen, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass für jede Fahrt 64 Reservierungen vorliegen.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Fahrt mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. (3 P)

Der Fahrpreis beträgt 60 €. Bei der Reservierung ist eine Anzahlung von 20 € zu entrichten, die beim Nichtantreten der Fahrt verfällt. Wenn eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss, bekommt sie vom Reisebüro nicht nur die Anzahlung zurück, sondern zusätzlich eine Entschädigung in Höhe von 100 € ausgezahlt.

(c) Das Reisebüro geht davon aus, dass die Summe der fälligen Rück- und Entschädigungszahlungen durchschnittlich weniger als 20 € pro Fahrt beträgt. Begründen Sie, dass man unter dieser Annahme mit dem Überbuchungsverfahren einen zusätzlichen Gewinn von über 60 € pro Fahrt gegenüber der Beschränkung auf 60 Reservierungen erwarten kann. (2 P)

- (d) Bei 64 Personen mit Reservierung beschreibt die Zufallsgröße Y die Anzahl der Personen, die zu einer Fahrt nicht antreten. Berechnen Sie den Term

$$\sum_{i=0}^3 \left(P(Y = i) \cdot (4 - i) \cdot 120 \right)$$

und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang.

(4 P)

Lösung

4. Hypothesentest

Die Geschäftsführerin des Reisebüros vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person eine reservierte Fahrt antritt, kleiner als 90% ist. Sie beauftragt daher einen Mitarbeiter, einen Test mit einem Signifikanzniveau von 2.5% zu erstellen, der geeignet ist, ihre Vermutung zu stützen.

- (a) Der Mitarbeiter wählt eine Stichprobe von 64 zu einer Fahrt angemeldeten Personen. Erstellen Sie den geforderten Signifikanztest, und geben Sie die entsprechende Entscheidungsregel an.

(7 P)

- (b) Der Mitarbeiter wählt vier Fahrten zufällig aus. Er führt für jede dieser Fahrten seinen Test durch. Aufgrund von 54, 56, 54 bzw. 55 zur jeweiligen Fahrt antretenden Personen kann er in keinem der vier Fälle seine Nullhypothese verwerfen. Zeigen Sie, dass bei einem Test mit gleichem Signifikanzniveau und gleicher Nullhypothese, der aber die insgesamt ausgewählten 256 Personen als Stichprobe verwendet, das ermittelte Ergebnis im Verwerfungsbereich der Nullhypothese liegt.

(3 P)

- (c) Es ist c eine positive ganze Zahl. Die Zufallsgröße X_c ist binomialverteilt mit den Parametern $c \cdot n$ und p .

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für alle n und p wahr sind.

- i) Für alle $c \geq 2$ gilt $E(X_c) = c \cdot E(X_1)$.
- ii) Für alle $c \geq 2$ und $k \in \{1; \dots; n\}$ gilt $P(X_1 \leq k) = P(X_c \leq c \cdot k)$.

Führen Sie jeweils einen entsprechenden Nachweis.

(5 P)

Lösung